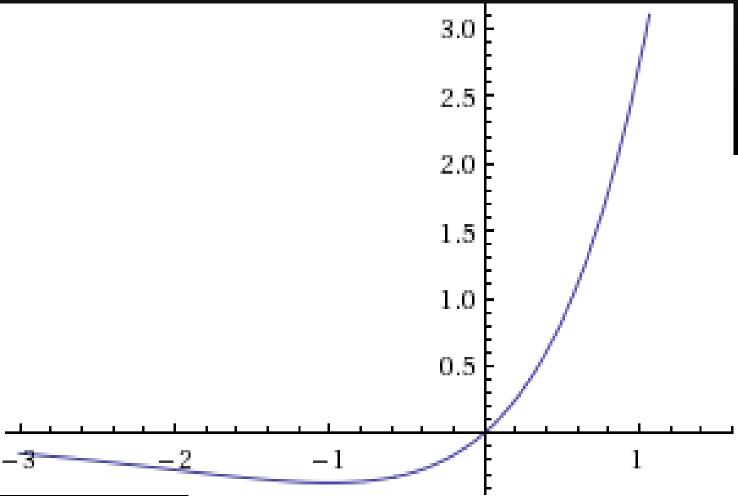
КАКО ДА СЕ КОРИСТИ ЛАМБЕРТОВАТА ФУНКЦИЈА

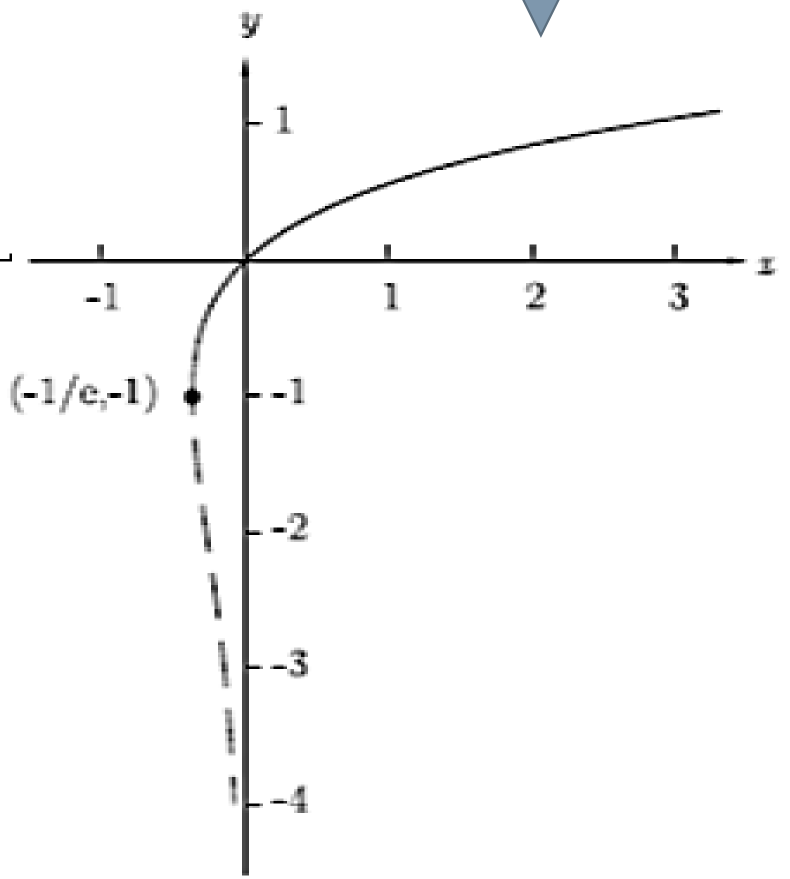
РАВЕНКИ, НУМЕРИЧКИ МЕТОДИ И СОФТВЕРСКИ АЛАТКИ

ГРАФИК НА ЛАМБЕРТОВАТА ФУНКЦИЈА

$$f(x) = xe^x$$



$$f^{-1}(xe^x) = x\,, \qquad x = W(x)e^{W(x)}$$



НЕКОИ ВРЕДНОСТИ

$W(-1/e) = -1, \quad \approx A\,(-0.37, -1)$

$W(0) = 0, \quad B\,(0, 0)$

$W(e) = 1, \quad \approx C\,(2.72, 1)$

$W(2e^2) = 2, \quad \approx D\,(14.78, 2)$

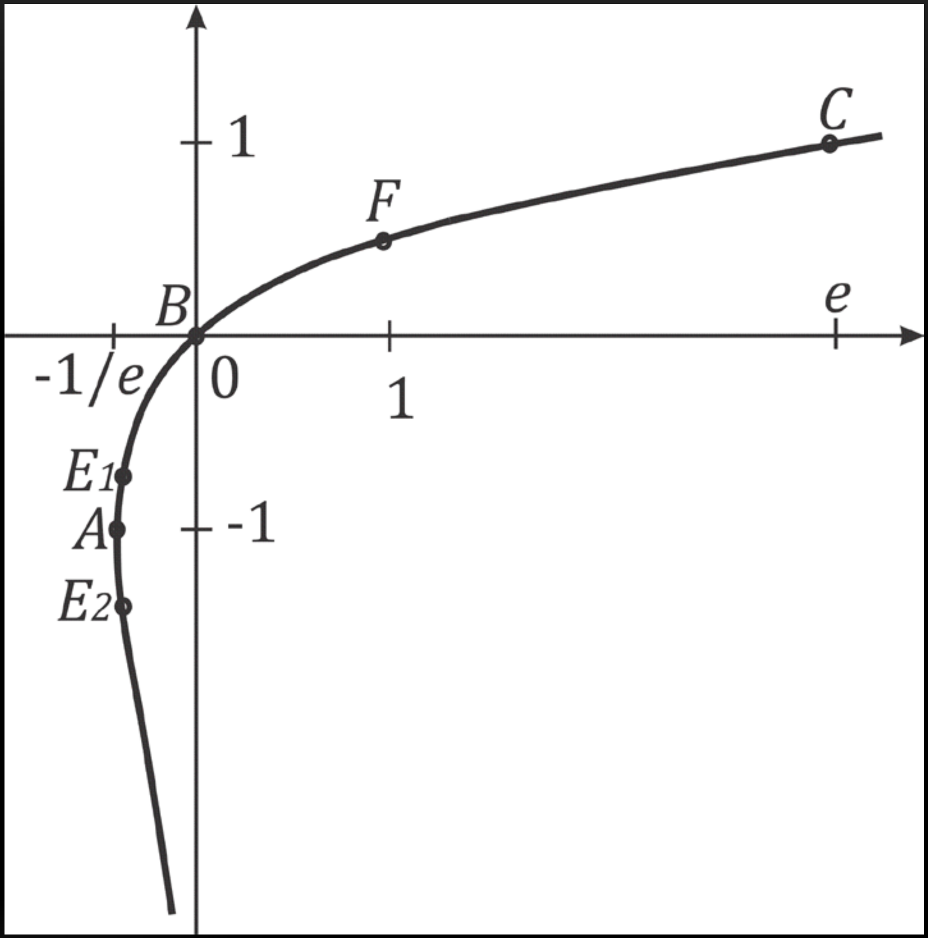
$W((-1/2)\ln 2) = \begin{cases} -\ln 2 \\ \ln\frac{1}{4} \end{cases}$

$\approx E_1(\text{-}0.35, 0.69),$

$\approx E_2(\text{-}0.35, \text{-}1.39)$

$W(1) = \Omega \approx 0.567143$

$\approx F\,(1{,}0.57)$



РАВЕНКИ

1. Да се реши равенката $5^x = 8x + 3$.

- Решение: Да преуредиме: $1/8 \cdot 5^x = x + 3/8$.

Ставаме смена $-t = x + 3/8$, па $x = -t - 3/8$.

Равенката станува $1/8 \cdot 5^{-t-3/8} = -t$, т.е.

$t \cdot 5^t = (-1/8) \cdot 5^{(-3/8)}$.

Да се сетиме: $3^k = e^{k\ ln 3}$, па $t \cdot e^{t\ ln 5} = (-1/8) \cdot 5^{(-3/8)}$, т.е.

$(t\ ln\ 5)\ e^{t\ ln\ 5} = (-1/8) \cdot 5^{(-3/8)}\ ln\ 5$,

Сега, со помош на Ламбертовата функција

$t = W((-1/8) \cdot 5^{(-3/8)} \cdot ln\ 5)\ /\ ln\ 5$, т.е.

$$x = -\frac{3}{8} - \frac{W(-\frac{1}{8} \cdot 5^{(-3/8)} \cdot ln\ 5)}{ln\ 5} \approx \begin{cases} -\frac{3}{8} + \frac{0{,}08}{ln\ 5} \\ -\frac{3}{8} + \frac{2{,}14}{ln\ 5} \end{cases} \approx \begin{cases} -0,3 \\ 1,76 \end{cases}$$

Воопшто, равенките од вид

$$\boldsymbol{a^x = bx + c}$$

се решаваат по формулата

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{W\left(-\frac{\ln a}{b} \cdot a^{-\frac{c}{b}}\right)}{\ln a}$$

2. **Да се реши равенката** $x^x = a$, **за** a **- константа**.

- **Решение: Да логаритмираме од двете страни,**

$x \ln x = \ln a.$

Но, $x = e^{\ln x}$, **па ако го замениме само првиот множител, добиваме**

$e^{\ln x} \ln x = \ln a.$

Имаме облик $te^t = \ln a$ **(за** $t = \ln x$**),**

а со помош на Ламбертовата функција,

$t = W(\ln a)$, **т.е.** $\ln x = W(\ln a)$, **па**

$$x = e^{W(\ln a)}$$

3. Да се реши равенката $x \ln x = a + bx$.

- Решение: Да ја доведеме x од лева страна,

$x \ln x - bx = a$, извлекуваме **x** пред заграда,

$x(\ln x - b) = a$, заменуваме $b = \ln e^b$,

$x(\ln x - \ln e^b) = a$, а од својството на логаритмите,

$x(\ln xe^{-b}) = a$. Множиме со e^{-b} лево и десно,

$xe^{-b}(\ln xe^{-b}) = ae^{-b}$, па ако ставиме $t = xe^{-b}$,

$t \ln t = ae^{-b}$. Како во задача 2, $t = e^{\ln t}$, па

$e^{\ln t} \ln t = ae^{-b}$. Преку Ламбертовата функција,

$\ln t = W(ae^{-b})$, т.е. $\ln(xe^{-b}) = W(ae^{-b})$,

$\ln x + \ln e^{-b} = W(ae^{-b})$, па $\ln x = b + W(ae^{-b})$ и значи,

$$x = e^{b + W(ae^{-b})}.$$

4. Да се реши равенката $x^a = b^{cx}$.

- Решение: Бидејќи $b^{cx} = e^{cx \ln b}$, имаме

$x^a e^{-cx \ln b} = 1$. Степенуваме со 1/*a* од лево и десно,

$x e^{-(cx/a) \ln b} = 1$. Множиме со $-(c/a) \ln b$, па

$$-\frac{cx \ln b}{a} e^{-\frac{cx \ln b}{a}} = -\frac{c \ln b}{a}.$$

Очигледно,

$$-\frac{cx \ln b}{a} = W\left(-\frac{c \ln b}{a}\right),$$

т.е.

$$x = -\frac{a}{c \ln b} W\left(-\frac{c \ln b}{a}\right).$$

5. **Да се реши равенката** $\log_a x = bx + c$

- **Решение:** Антилогаритмираме,

  $x = a^{bx+c}$, **и прередуваме,** $xa^{-bx} = a^c$,

  а бидејќи $a^{-bx} = e^{-bx \ln a}$, $xe^{-bx\ln a} = a^c$.

  Лево и десно множиме со $-b \cdot \ln a$, **па**

  $-bx \ln a \cdot e^{-bx \ln a} = -ba^c \ln a$. **Значи,**

  $-bx \ln a = W(-ba^c \ln a)$, **т.е.**

$$x = -\frac{1}{b \cdot \ln a} W(-ba^c \ln a)$$

КАКО ДА ПРЕСМЕТАМЕ $W(x)$?

Ако $|\, x \,| < 1/e$, се користи следниот Маклоренов ред

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n$$

(се добива само една вредност $W(x) > -1$)

или, истото напишано со рекурзија

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \text{ за } c_1 = 1 \text{ и } c_n = -\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-2} \cdot c_{n-1}.$$

Пример 1. Да пресметаме $W(0{,}2)$ со Маклоренов ред.

Дали одговара примената на редот за $x = 0{,}2$?
Бидејќи 0,2 < 1/e ≈ 0,37 – одговорот е ДА.
Колку членови од редот да земеме? Нека $n = 5$.

$$W(x) \approx x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{8}{3}x^4 + \frac{125}{24}x^5$$

$$W(0{,}2) \approx 0{,}2 - 0{,}04 + 1{,}5 \cdot 0{,}008 - \frac{8}{3} \cdot 0{,}0016 + \frac{125}{24} \cdot 0{,}00032$$
$$= 0{,}1694$$

Пример 2. Да пресметаме $W(0,1)$ со рекурзија. Примената на рекурзијата за x = 0,1 одговара бидејќи 0,1 < 1/e ≈ 0,37. Нека n = 6.

$$W(x) \approx \sum_{n=1}^{10} c_n \cdot 0{,}1^n$$

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -1\,, \qquad c_3 = \frac{3}{2}\,, \quad c_4 = -\left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{8}{3}\,,$$

$$c_5 = \left(\frac{5}{4}\right)^3 \cdot \frac{8}{3} = \frac{125}{24}\,, \quad c_6 = -\left(\frac{6}{5}\right)^4 \cdot \frac{125}{24} = -\frac{54}{5}\,,$$

$$W(x) \approx 0{,}1 - 0{,}1^2 + \frac{3}{2} \cdot 0{,}1^3 - \frac{8}{3} \cdot 0{,}1^4 + \frac{125}{24} \cdot 0{,}1^5 - \frac{54}{5} \cdot 0{,}1^6$$

$$\approx 0{,}091274617$$

ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА $W(x)$ ЗА $x > 1/e$: ЊУТНОВ НУМЕРИЧКИ МЕТОД

Њутновиот метод е нумерички метод за наоѓање приближно решение x за $f(x) = 0$.
За да решиме $x = W(x)\, e^{W(x)}$, ставаме $W(x) = y$, и имаме $x = ye^y$, т.е. $ye^y - x = 0$. Затоа за Њутновиот метод ни треба функцијата $g(y) = ye^y - x$ за да апроксимираме за y во $g(y) = 0$. Имаме

$$\boldsymbol{y_{n+1} = y_n - \frac{g(y_n)}{g'(y_n)} = \frac{{y_n}^2 + xe^{-y_n}}{y_n + 1}}$$

Бидејќи $W(x)$ споро расте, може да земаме $\boldsymbol{y_0} = 0$.

<u>Пример</u>. Со помош на Њутновиот метод најди $W(2)$.

- Земаме $\boldsymbol{y_0} = 0$ и имаме $\boldsymbol{x = 2}$.

$$\boldsymbol{y_1 = \frac{{y_0}^2 + xe^{-y_0}}{y_0 + 1} = 2;} \quad \boldsymbol{y_2 = \frac{{y_1}^2 + xe^{-y_1}}{y_1 + 1} = \frac{4 + 2e^{-2}}{3} \approx 1,4236}$$

$$\boldsymbol{y_3 = \frac{{y_2}^2 + 2e^{-y_2}}{y_2 + 1} \approx 1,0349;} \quad \boldsymbol{y_4 = \frac{{y_3}^2 + 2e^{-y_3}}{y_3 + 1} \approx 0,8755}$$

$$\boldsymbol{y_5 = \frac{{y_4}^2 + 2e^{-y_4}}{y_3 + 1} \approx 0,853;} \quad \boldsymbol{y_6 = \frac{{y_5}^2 + 2e^{-y_5}}{y_5 + 1}} \approx 0,8526$$

Следните членови се блиски на y_6 па може да кажеме $W(2) \approx 0,8526$.

СОФТВЕРСКИ АЛАТКИ

Во пакетот Matlab за Ламбертовата функција се користи програмската функција со назив **`lambertw`** .

Има 2 случаи за реалните x – главна и негативна гранка.

Ако сакаме да пресметаме $W(x) > -1$ (главна гранка) на пример $W(2)$, на командната линија запишуваме

```
>> lambert(2)
```

Одговорот при **`format long`** е:

```
ans = 0.852605502013726
```

Во случаите кога $W(x)$ има 2 вредности, $-\frac{1}{e} < x < 0$:

На пример, ако бараме $W(-0{,}2)$, за $W(0{,}2) > -1$ се бара исто како претходно:

```
>> lambertw(-0.2)
```

Одговорот при **`format long`** е:

```
    ans = -0.259171101819074
```

Но за $W(x) < -1$ (негативната гранка), запишуваме

```
>> lambertw(-1,-0.2)
```

Одговорот при **`format long`** е:

```
    ans = -2.542641357773527
```

Слично се користат и **`lambertw`** во Maple, Python и Perl, а **`ProductLog`** (може и **`LambertW`**) во Mathematica.